محمود نصیری

تفکر هندسی و مفهوم‌های هندسی

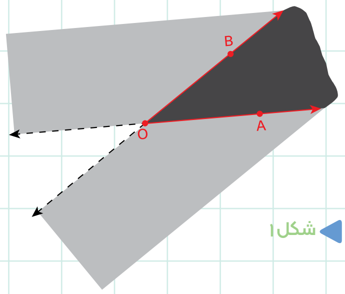
مقدمه

در این سلسله مقاله‌ها سعی در اشاعهٔ مفهوم‌ها و تفکر هندسی داریم و می‌کوشیم دانش‌آموزان و مخاطبان مجله را با ساختار هندسه و مفهوم‌های اولیهٔ آن آشنا کنیم. این مجموعه مخصوص دانش‌آموزی است که در دوران ابتدایی تا حدودی با مفهوم‌های هندسه به‌طور شهودی و غیرمستقیم آشنا شده است. در این مقاله‌ها بررسی و بیان مفهوم‌های هندسی دقیق‌تر از آن است که دانش‌آموزان در دورهٔ ابتدایی با آن‌ها آشنا می‌شوند. در دورهٔ اول متوسطه، دانش‌آموزان در سطح ۲ و تا حدودی در سطح ۳ از مدل توسعهٔ تفکر هندسی قرار می‌گیرند. یعنی در این سطح دانش‌آموزان باید بتوانند رابطه‌های موجود بین شکل‌های هندسی را تشخیص دهند و آن‌ها را براساس ویژگی‌ها دسته‌بندی کنند. مثلاً در یک چهارضلعی، ضلع‌های مقابل دوبه‌دو موازی‌اند و در نتیجه، زاویه‌های مقابل هم‌اندازه هستند. در این سطح اثبات‌های غیررسمی را دنبال می‌کنیم و دانش‌آموزان را با اثبات‌هایی با گام‌های محدود آشنا می‌سازیم. می‌کوشیم از استدلال‌های غیررسمی گام‌به‌گام وارد درک استنتاج شویم و آن‌ها را با استدلال‌های رسمی‌تر آشنا کنیم. به همین دلیل آموزش هندسه در سال‌های هفتم، هشتم و نهم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این سال‌ها با مرور مفهوم‌هایی که در دورهٔ ابتدایی با آن‌ها آشنا شده‌اند و استفاده از نمادها و حرف‌های لاتین، برای مفهوم‌هایی مانند پاره‌خط، زاویه و اندازه‌های آن‌ها و همچنین مثلث و کلاً چندضلعی‌ها، سعی می‌شود دانش‌آموزان با تعریف‌های بیشتر و دقیق‌تری آشنا شوند. از جمله اساسی‌ترین مفهوم‌هایی که در این دوره شما دانش‌آموزان با آن‌ها آشنا می‌شوید، می‌توان به هم‌نهشتی، تقارن و تبدیل‌های هندسی مانند بازتاب (برگرداندن)، انتقال (لغزاندن)، دوران (چرخاندن) و تشابه اشاره کرد. همچنین یکی دیگر از سرفصل‌های مهم، تفکر و تجسم فضایی و بررسی شکل‌های سه‌بعدی است که در این دوره همراه با محاسبهٔ مساحت و حجم مطالعه می‌شوند. در قسمت‌های قبلی با مفهوم‌های نیم‌خط، پاره‌خط، اندازهٔ پاره‌خط، هم‌نهشتی و زاویه آشنا شدیم. در این قسمت به توضیح درون زاویه، نیمساز زاویه و انواع آن می‌پردازیم.

درون زاویه، نیمساز زاویه و انواع زاویه‌ها

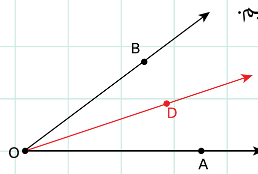
اشتراک طرفی از خط $\overrightarrow{OA}$ که شامل نقطهٔ B اســـت، با طرفی از خط $\overrightarrow{OB}$ که شـــامل نقطهٔ A است را درون زاویهٔ AOB می‌نامیم.

در شکل ۱. درون زاویهٔ $\angle AOB$ اشتراک دو قســـمت سایه زده شده است؛ یعنی، اشـــتراک طرفی از خط $\overrightarrow{OA}$ که شامل نقطهٔ B است، با طرفی از خط $\overrightarrow{OB}$ که شامل نقطهٔ A است.



شکل ۱

هـــر نقطه را کـــه درون زاویه نباشـــد، برون‌زاویه می‌نامند. به کمک درون‌زاویه می‌توانیم چند مفهوم دیگر را در زاویه تعریف کنیم.



شکل ۲

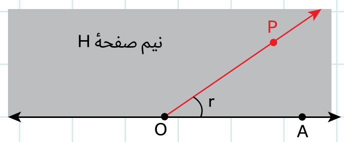
اگر D نقطـــه‌ای درون زاویهٔ AOB باشد (شـــکل ۲)، نیم‌خط OD را نیم‌ســـاز این زاویه گوییم. هرگاه: $m\angle AOD = m\angle BOD$.

یعنی نیم‌ســـاز یک زاویه آن زاویه را به دو زاویهٔ هم‌نهشت (با اندازه‌های برابر) تقسیم می‌کند. اگر اندازهٔ زاویه‌ای برابر عدد r باشد، به وسیلهٔ نیم‌ساز زاویه، دو زاویه ساخته می‌شوند که در یک ضلع مشترک و هیچ نقطهٔ درونی مشترکی ندارند؛ به‌طوری‌که اندازهٔ هرکدام برابر $\frac{r}{۲}$ است.

وقتی حرف از ســـاختن یـــک زاویه به اندازهٔ معینی می‌شـــود، یکی از مفاهیم هندسه که در زمان **اقلیدس** به سختی می‌توانســـت تعریف شـــود، امروزه به سادگی تعریف می‌شود. زیرا چنانچه بیان کردیم، در زمان اقلیدس همهٔ عددهایی را که امروز می‌شناســـیم، شناخته شده نبودند. مثلاً $\sqrt{۲}$ خود داستانی مفصل دارد. امروزه با شناخت این عددها، بیان مفهوم‌های هندسی نیز ساده شده‌اند.

پذیرفتن ویژگی زیر که به «اصل ساختن زاویه» نیز معروف است، مشکل ما را در هم‌نهشتی زاویه‌ها و به‌طور شهودی در منطبق کـــردن زاویه‌هـــا روی هم حل می‌کند.

فرض کنیـــم $\overrightarrow{OA}$ نیم‌خطی روی مرز نیم‌صفحهٔ H باشد. (شکل ۳) برای هـــر عدد r بین صفر و ۱۸۰، دقیقاً یک نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ که P در H است وجود دارد که:
$m\angle AOP = r$



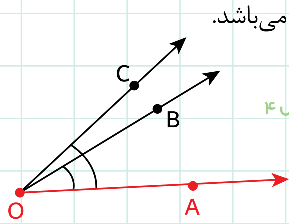
شکل ۳

چگونـــه از این ویژگی در حل مســـئله استفاده می‌کنیم؟

در شکل ۴ فرض کنیم:

$m\angle AOB = m\angle AOC = r$

حال اگر B و C در یک طرف خط OA واقع باشند، آن‌گاه بنا بر اصل ساختن زاویه باید $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ بر هم منطبق شوند. یعنی $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$. این تساوی به معنـــی یکی بودن یـــا «*این همان است*» می‌باشد.

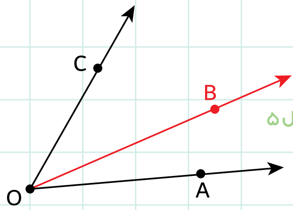


شکل ۴

اکنون با اســـتفاده از مفهوم درون‌زاویه و یادآوری چند تعریف از سال‌های قبل، به یک‌واحد اندازه‌گیری برای زاویه می‌رسیم.

اگـــر مجموع اندازه‌هـــای دو زاویه ۹۰° باشد، آن دو زاویه را **متمم** گویند. اگر مجموع اندازه‌های دو زاویه ۱۸۰° باشد، آن دو زاویه را **مکمل** گویند.

دو زاویهٔ مجاور: هر دو زاویه را که در یک صفحه باشند، مجاور گوییم، هرگاه در یک ضلع مشترک و هیچ نقطهٔ درونی مشترکی نداشته باشند.



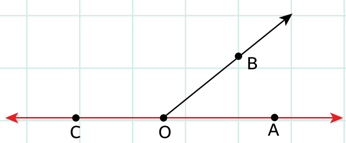
شکل ۵

در شکل ۵، دو زاویهٔ AOB و BOC در ضلع OB مشترک هستند. می‌توانیم دو زاویهٔ مجاور را به این صورت نیز تعریف کنیم: «هر دو زاویه را که در یک ضلع مشترک و دو ضلع دیگر به جز رأس، در دو طرف خط شامل این ضلع مشترک باشند، مجاور می‌نامیم.»

در شـــکل ۵، $\overrightarrow{OB}$ ضلع مشـــترک دو زاویـــه و $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$ به جز O در دو طرف خط $\overrightarrow{OB}$ واقع‌اند.

در شـــکل ۶، $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$ دو نیم‌خـــط متقابل هستند و $\overrightarrow{OB}$ نیم‌خط دلخواهی اســـت. در این صـــورت دو زاویهٔ مجاور AOB و BOC را **مجانـــب** می‌نامیم.

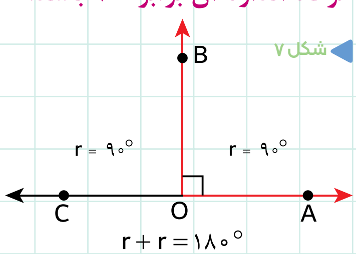
با پذیرفتن اینکه هـــر دو زاویهٔ مجانب مکمل هستند، می‌توانیم واحدی برای اندازه‌گیری زاویهٔ معرفی کنیم.

شکل ۶


اگـــر دو زاویـــه مجـــانب باشنـــد، آن‌گاه مکمل‌اند.

اگـــر دو زاویهٔ مجانب هم‌اندازه باشـــند، آن‌گاه چـــون مجمـــوع اندازه‌های آن‌ها برابر ۱۸۰° است، پس اندازهٔ هریک برابر ۹۰° اســـت. در این صورت هریک از این زاویه‌هـــا را قائمه می‌نامند (شـــکل ۷). بنابراین:

یک زاویه را زاویهٔ قائمه می‌نامند. هرگاه اندازهٔ آن برابر ۹۰° باشد.

شکل ۷


در ایـــن صورت، $\frac{1}{90}$ اندازهٔ زاویهٔ قائمه را یـک درجه می‌نامیم. یک درجه را با نماد 1° نشان می‌دهند. بنابراین:

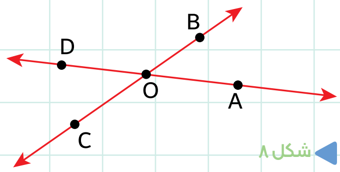
یک درجه عبارت است از $\frac{1}{90}$ اندازهٔ زاویهٔ قائمه.

اگر اندازهٔ یک زاویـه بین صفر و 90° باشد، آن‌گاه زاویه را «حاده» گویند. اگر اندازهٔ یـک زاویه بین 90° و 180° باشـد، آن‌گاه زاویـه را «منفرجـه» می‌نامند.
اقلیـدس اصلی را بیان کـرده بود که به‌صورت زیر است:

اصل چهارم اقلیدس: همهٔ زاویه‌های قائمه برابرند.

امروزه این برابری بـه معنی هم‌اندازه بودن یا همان همنهشتی دو زاویه است. اما با تعریف همنهشتی دو زاویه برحسب اندازه‌ها، چون اندازهٔ همهٔ زاویه‌های قائمه برابر ۹۰ است در نتیجه همنهشت‌اند و نیازی به این اصل نیست. نیم‌خط‌های متقابل را قبلاً تعریف کردیم. به کمک آن دو زاویهٔ متقابـل به رأس را تعریف می‌کنیم:

دو زاویه را متقابل به رأس می‌نامند هرگاه ضلع‌های هریک نیم‌خط‌های متقابل ضلع‌های دیگری باشد.

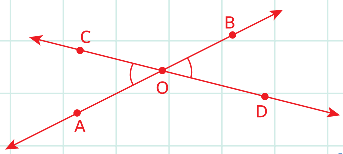


شکل ۸

در شکل ۸ $\angle AOB$ و $\angle COD$ متقابل به رأس هستند، $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OD}$ دو نیم‌خط متقابل‌اند و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ نیز دو نیم‌خط متقابل هستند. $\angle BOD$ و $\angle AOC$ نیز متقابل به رأس هستند، چرا؟ چون قول داده‌ایم که گام‌به‌گام وارد اثبات‌های هندسی بشویم، در این قسمت اثباتی را بیان خواهیم کرد که در مورد همنهشتی دو زاویهٔ متقابل به رأس است.
در ریاضی هر آنچـه را که بدون اثبات می‌پذیریـم، «اصـل» می‌نامنـد و هر آنچـه را که نیاز به اثبات دارد، «قضیه» می‌گویند.
این مفهوم‌ها به توضیح‌های بیشـتری نیاز دارند، اما ما در این بخش‌های اولیه وارد این بحث‌ها نخواهیم شـد و به‌طور غیررسـمی از آن‌ها یـاد می‌کنیم. در بخش‌های بعدی دربارهٔ منطق ریاضی و اثبات‌ها به‌طور مشروح‌تر بحث خواهیم کـرد. در قضیهٔ زیر کاربـرد آنچه را که تاکنون تعریف و بیان کرده‌ایم، مشاهده می‌کنید. ابتدا صورت قضیه و سـپس اثبات آن را توضیح می‌دهیم.

قضیهٔ زاویه‌های متقابل به رأس: اگر خط‌های AB و CD در نقطهٔ O که بیـن A و B و همچنین بین C و D است، متقاطع باشند، آن‌گاه: $\angle AOC \cong \angle BOD$

اثبات: خلاصهٔ صـورت قضیه چنین است: اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند، آن‌گاه همنهشت‌اند (شکل ۹).



شکل ۹

۱. بنـا به فرض، چـون O بین A و B است و $\overrightarrow{OC}$ هر نیم‌خطی با ابتدای O اسـت. بنا بر تعریف، زاویه‌های AOC و COB مجانب‌انـد (تعریـف دو زاویهٔ مجانب).

۲. بـه همین ترتیـب O بین C، D و $\overrightarrow{OB}$ هـر نیم‌خط با ابتدای O اسـت. در نتیجـه: $\angle COB$ و $\angle BOD$ نیز مجانب‌اند.

۳. $m\angle AOC + m\angle COB = 180^\circ$
همچنین: $m\angle COB + m\angle BOD = 180^\circ$
(اصل دو زاویهٔ مجانب مکمل‌اند).

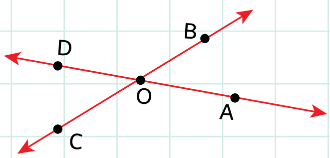
۴. $m\angle AOC + m\angle COB = m\angle COB + m\angle BOD$
اکنون مقـدار $\angle COB$ را از دو طرف کم می‌کنیم. در نتیجه: $m\angle AOC = m\angle BOD$.

۵. چون: $m\angle AOC = m\angle BOD$ در نتیجه بنا بر تعریف همنهشـتی داریم: $\angle AOC \cong \angle BOD$.

اکنون برای تمرین بیشتر در قضیهٔ بالا قضیهٔ دیگـری را در فعالیت زیر دنبال می‌کنیم که به طریقـی جای فرض و آنچه باید ثابت کنیم، عوض شده است.

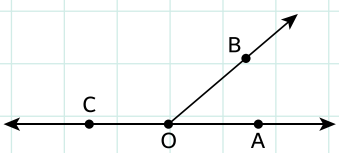
فعالیت: فرض کنیم در یک صفحه دو زاویهٔ همنهشـت رأس مشترک دارند و یک ضلع یکی نیم‌خط متقابل ضلعی از زاویهٔ دیگر باشـد و دو ضلع دیگر به جز رأس در دو طرف این خط باشند.
در شکل ۱۰ داریم:
$\angle AOB \cong \angle COD$ و $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OD}$ دو نیم‌خط متقابل هستند.
چگونـه از $m\angle AOB = m\angle COD$ نتیجه می‌گیرید:
$m\angle COD + m\angle DOB = 180$

شکل ۱۰



اکنون بنا بـر زاویه‌های مکمل و اصل ساختن زاویه چگونه نتیجه می‌گیرید کـه $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ دو نیم‌خط متقابل هستند؟
سـپس نتیجه بگیریـد: $\angle AOB$ و $\angle COD$ متقابل به رأس هستند.

در شـکل ۱۱، دو نیم‌خط $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$ متقابل هستند و $m\angle AOB = 2r+10$ و $m\angle BOC = 11r-12$ اندازه‌هـای هریک از این زاویه‌ها را محاسبه کنید.



شکل ۱۱